

La régularité des écoulements granulaires



I/ Les milieux granulaires, leurs propriétés et les modèles pour en rendre compte

- 1- Généralités sur les granulaires : dilatance, redirection des contraintes, saturation de contrainte
- 2- Le modèle de Janssen

II/ Vérifications expérimentales

- 1- Principe de mesure
- 2- Résultats expérimentaux : cohérence et écarts à la théorie

Introduction

En abordant les matériaux granulaires, on a à l'esprit le tas de sable, qui semble d'une banalité lui refusant tout intérêt dans une étude. Néanmoins la physique des milieux granulaires est nettement plus étendue et complexe, leur structure particulière leur conférant des propriétés très spécifiques, et des comportements allant souvent à l'encontre de l'intuition. Grâce à une aide avisée pour orienter mon travail de Y.Bertho, de l'université Paris-Sud 11, et un entretien très instructif avec D.Bonamy du CEA, je me suis intéressé à l'un de ces comportements, présentant des applications intéressantes dans la mesure des durées avec, par exemple, un sablier : la régularité dont fait preuve l'écoulement d'un granulaire hors de son réservoir de stockage.

Généralités sur le comportement des matériaux granulaires

Un matériau granulaire se comporte de façon tout à fait singulière dans sa réponse à une contrainte extérieure. Différents phénomènes se distinguent par leur influence sur ce comportement :

-La dilatance, mise en évidence par O.Reynolds, correspond au fait qu'un empilement granulaire ne peut se déformer sans subir une augmentation de volume, induisant ainsi des phénomènes de blocages lorsque ces milieux sont confinés. (Figure 1)

-Du fait de sa structure interne, composée de multiples particules en contact, un granulaire soumis à une contrainte orientée selon un axe aura tendance à défléchir la contrainte dans une direction orthogonale. (Figure 2)

-Des expériences de photoélasticimétrie montrent qu'il existe en fait dans les granulaires des «chaînes de force», formées par des séries de grains en contact qui supportent toutes les contraintes, tandis que d'autres sont quasiment libres. Ces structures sont fragiles au sens où elles sont en constante réorganisation sous l'influence de l'extérieur.

On est donc amené à considérer que les contraintes appliquées à un granulaire se propagent le long de ces «chaînes de force», donc de manière anisotrope et irrégulière, car elles ne peuvent pas être totalement déterminées à cause des multiples contacts solide-solide mal définis.

Applications dans le cas d'un écoulement

Lors de l'écoulement d'un sablier, on s'attend à ce que ces phénomènes interviennent de manière similaire, le matériau étant simplement en écoulement au lieu d'être statique. Leur influence sera sensible grâce à la formation de «voûtes», structures de même nature que les chaînes de force, qui se forment en prenant appui sur les parois, et écrantent en grande partie le poids des grains situés au-dessus, redirigé vers les parois qui vont supporter de fortes contraintes. Ces voûtes seront pendant l'écoulement continuellement détruites et recrées, ce qui va se traduire par un effet moyen efficace en permanence. (Figure 3)

Ces différents phénomènes de blocage conduisent à un constat expérimental très bien vérifié : on atteint à la base d'un granulaire ensilé, pour une hauteur de grains assez élevée, une saturation de la contrainte verticale ressentie. Ainsi, les grains situés au niveau de l'ouverture d'écoulement seront soumis à une contrainte quasiment indépendante de la hauteur de grains restante, donc de l'avancement de l'écoulement.

On obtiendra alors une vitesse de sortie des grains constante au cours de l'écoulement, et donc un débit constant (à opposer au débit obtenu grâce au même montage avec un liquide), ce qui permet en particulier d'utiliser le sablier comme outil de mesure des durées, rudimentaire mais efficace pour les applications peu exigeantes dont il fut historiquement l'objet.

Modélisation théorique de ce comportement

A partir de ces constats, pour rendre compte des résultats expérimentaux dans le cas de la contrainte verticale dans un silo, Janssen établit en 1895 un modèle encore très utile aujourd'hui, relativement simple et donnant des résultats satisfaisants, au prix d'hypothèses fortes sur l'état du matériau (Figure 4) :

-Il traite le granulaire par tranches, considérant des contraintes moyennes s'exerçant sur l'ensemble d'une couche d'altitude donnée.

-Il considère le matériau au seuil de glissement aux parois, créant la relation entre forces : $d^2T = \mu_s d^2N$.

-Pour traduire la redirection des contraintes, il introduit également la relation entre contraintes verticale et horizontale : $Ph(z) = K Pv(z)$, K étant le coefficient de Janssen, dépendant du silo. Cette relation, capitale dans ce modèle, mais problématique car K est difficile à déterminer précisément, peut s'interpréter microscopiquement grâce à l'angle de redirection : $K = \cotan(\theta)$. (Figure 5)

On écrit alors la stabilité de la couche, soumise aux forces représentées en figure 4 :

$$\text{Sur Oz : } dT(z) - dm g + F_v(z) - F_v(z+dz) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } \quad dT(z) &= \mu_s dN(z) = \mu_s 2\pi R dz Ph(z) = \mu_s 2\pi R dz K Pv(z) \\ dm &= \rho \pi R^2 dz \\ F_v &= \pi R^2 Pv \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } 2\pi R \mu_s K Pv(z) - \rho \pi R^2 g - \pi R^2 (\delta Pv / \delta z) = 0$$

$$\text{Soit : } \delta Pv / \delta z - Pv / A = -\rho g \quad \text{où } A = R / (2 \mu_s K)$$

On obtient donc une solution du type : $P_v(z) = \rho g A [1 - \exp(-(z-H)/A)]$, H hauteur du sommet du granulaire où P_v est négligeable. On voit qu'en $z=0$ à la base du tas on obtiendra un poids ressenti du type $P = P_{\text{sat}}(1 - \exp(-H/A))$.

On obtient donc une expression en accord avec les constats expérimentaux de saturation de contrainte pour une hauteur de grains assez grande, d'où l'utilité de ce modèle. Ses prédictions sont vérifiables, à condition de mener l'expérience dans des conditions les plus proches possibles des hypothèses de Janssen, ce qui a donné lieu dans mon cas à plusieurs essais infructueux avant d'obtenir une courbe correspondant à la théorie. (Figures 6 et 7)

L'inconvénient de ce modèle étant l'utilisation d'hypothèses difficiles à accepter et la limitation de sa validité au cas d'un granulaire ensilé sans surpoids à sa surface (ce qui inclut le cas d'un sablier), d'autres modèles se sont ensuite développés pour rendre compte, plus rigoureusement, de plus de situations, principalement basés sur des variations dans la prise en compte de l'effet de voûte et des contacts indéfinis entre grains. Ils sont plus complexes et ne feront pas l'objet de développements.

L'important est que l'on peut considérer une vitesse de sortie des grains constante lors d'un écoulement, due à la saturation de contrainte. La constance du débit est un effet important, qui a représenté une part de l'objectif à vérifier lors des expériences menées pendant cette étude. Un calcul simple permet dans ces conditions d'établir un résultat connu comme la loi de Beverloo : le débit de sortie d'un silo varie linéairement avec le diamètre de l'ouverture de vidange à l'exposant $5/2$ (si cette grandeur est la seule significative pour l'écoulement). Ceci représente l'effet global, et l'autre part de ce que j'ai cherché à vérifier expérimentalement, grâce à des moyennes sur de nombreuses mesures.

Dispositif de mesures en écoulement

Afin de faire les vérifications sur le débit, j'ai donc effectué des séries de mesures en faisant varier le diamètre de l'ouverture de vidange, d'une part avec du sable, et d'autre part avec des billes de verre, pour lesquelles j'ai également pu faire varier la taille des « grains ». Ces mesures ont été effectuées sur un principe simple d'enregistrement de la masse écoulee en fonction du temps, grâce à un montage se rapprochant d'un silo, ou de la partie haute d'un sablier. (Figures 8 et 9)

Résultats

Le traitement des données recueillies durant ces expériences m'a permis d'obtenir des grandeurs moyennes, et assez de valeurs pour pouvoir construire les graphes permettant de vérifier : d'une part la constance du débit pour un écoulement isolé, d'autre part la loi de Beverloo pour la globalité des débits moyens mesurés.

Les premières courbes tracées suivent l'évolution de la masse écoulee en fonction du temps. On obtient invariablement une droite très satisfaisante, qui montre que l'approximation du débit constant est correcte pour l'effet moyen détectable directement par l'expérimentateur. (Figure 10)

Le tracé du débit en fonction du temps fait apparaître des précisions à prendre en compte. On distingue deux cas où le débit se comporte différemment. Lorsqu'on utilise du sable, pour lequel les dimensions des particules sont vraiment peu significatives, on obtient un débit instantané oscillant légèrement autour d'une valeur bien définie. On retrouve donc le fait qu'en moyenne l'écoulement va être très régulier, tandis que microscopiquement, le fonctionnement alternatif de formation-destruction des voûtes au-dessus de l'ouverture va induire des oscillations à courte échelle temporelle dans le débit. En revanche, lorsqu'on utilise des billes la durée des mesures ne laisse pas le temps aux oscillations d'apparaître, mais met en évidence l'existence d'un régime d'amorçage de l'écoulement, une augmentation progressive du débit pour atteindre une valeur moyenne.

Le deuxième résultat vient du tracé du débit moyen en fonction du diamètre de l'ouverture en échelle logarithmique, qui donne dans le cas général une droite de pente $5/2$ et permet bien de vérifier la loi de Beverloo. Ce tracé met aussi en relief le fait que cette loi a un domaine d'application fini, car on observe deux types de divergence. Le premier est à diamètre élevé avec le sable, où l'on constate que le débit prend des valeurs supérieures aux prévisions, le deuxième à diamètre faible avec les billes, où la théorie surestime les valeurs réelles. Ces deux phénomènes sont liés à des problèmes d'échelle respective des différents paramètres de l'expérience, qui font que dans ces cas limites le diamètre de l'ouverture n'est plus la seule grandeur significative de l'écoulement, et donc que la loi de Beverloo n'est plus rigoureusement valable. Ils ne doivent pas faire perdre de vue le fait que dans les zones moyennes on obtient une bonne adéquation avec la loi de Beverloo. (Figure 11)

Conclusion

Cette étude a donc permis de vérifier que, contrairement à un fluide, un matériau granulaire pouvait grâce à ses propriétés très particulières, traduites par l'effet Janssen entre autres, présenter un écoulement régulier et stationnaire. On a pu voir qu'en se restreignant à des domaines où certaines conditions sont remplies on pouvait modéliser le débit grâce à la loi de Beverloo. On pourra retenir que, malgré le comportement complexe en général de la matière en grains, dans ces conditions bien précises d'évolution on peut trouver des lois de comportement bien vérifiées, même si elles sont obtenues grâce à des raisonnements purement dimensionnels ou basées sur des hypothèses difficilement justifiables.

Bibliographie :

- Ouvrages :-«Du sac de billes au tas de sable», Jean-Paul Troadec et Etienne Guyon, éditions Odile Jacob Sciences, 2005
-«Sables émouvants», Jacques Duran, éditions Belin Pour la science, 2005
-«Sables, poudres et grains», Jacques Duran, éditions Eyrolles, 1997
- Articles : -Jullien Rémi, La Recherche, 1992, n°247, p.1198 («La ségrégation chez les grains de sable»)
-Heinrich M.Jaeger et Sidney R.Nagel, La Recherche, 1992, n°249, p.1380 («La physique de l'état granulaire»)
-Bideau Daniel, Ammi Madani et Hansen Alex, La Recherche, 1994, n°261, p.92 («Le tic-tac du sablier»)
-Radjai Franck, La Recherche, 1997, n°304, p.44 («La double vie du sable»)
-Claudin Philippe, La Recherche, 1999, n°324, p.86 («Les tas de sable»)
- Thèses : -Guillaume Ovarlez, 2002, Université Paris XI : «Statique et Rhéologie d'un milieu granulaire confiné»
-Philippe Claudin, 1999, Annales de physique 24 EDP sciences : «La physique du tas de sable»
-Yann Bertho, 2003, Ecole Polytechnique : «Dynamique d'écoulements gaz particules en conduite verticale»
-Nor-Edine Abriak, 1991, Université de Lille 1: «Ecoulement d'un matériau granulaire à travers un orifice, effet de paroi»

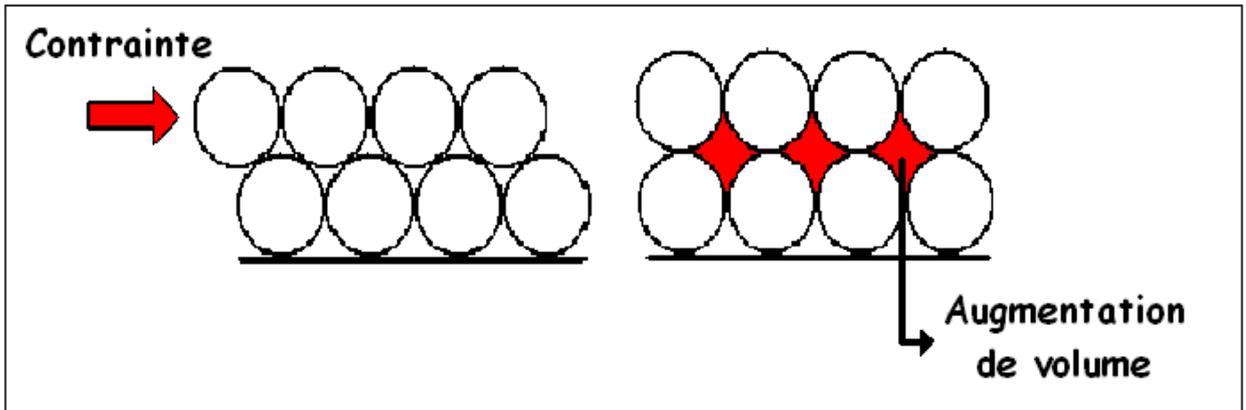


Figure 1 : Dilatance de Reynolds

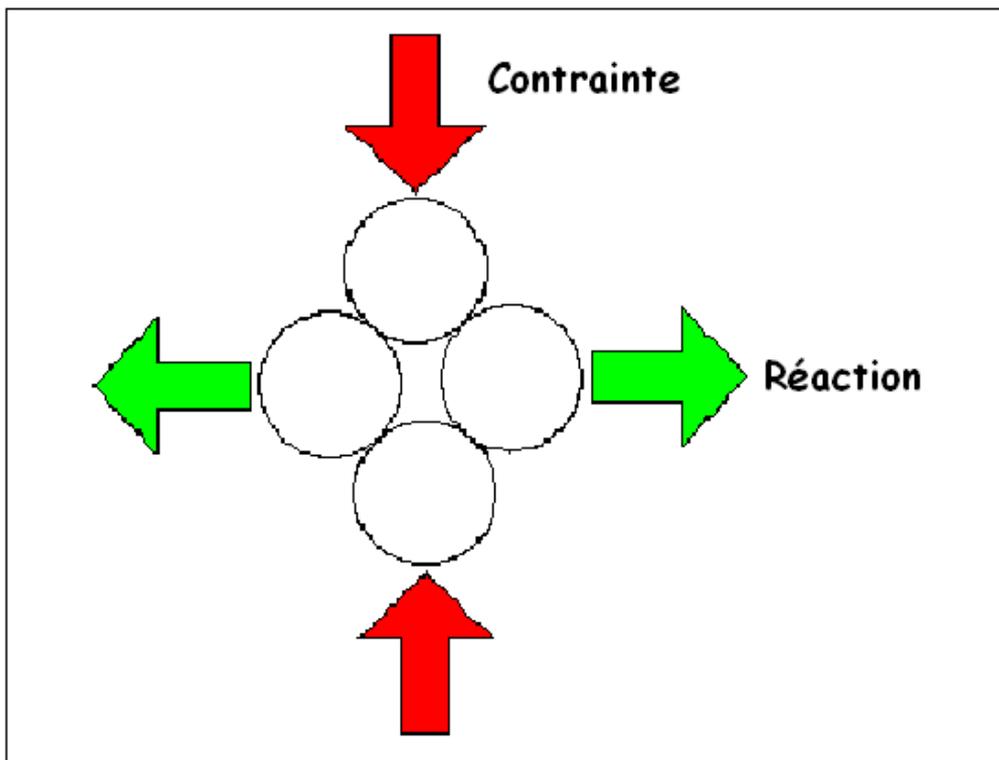


Figure 2 : Redirection des contraintes

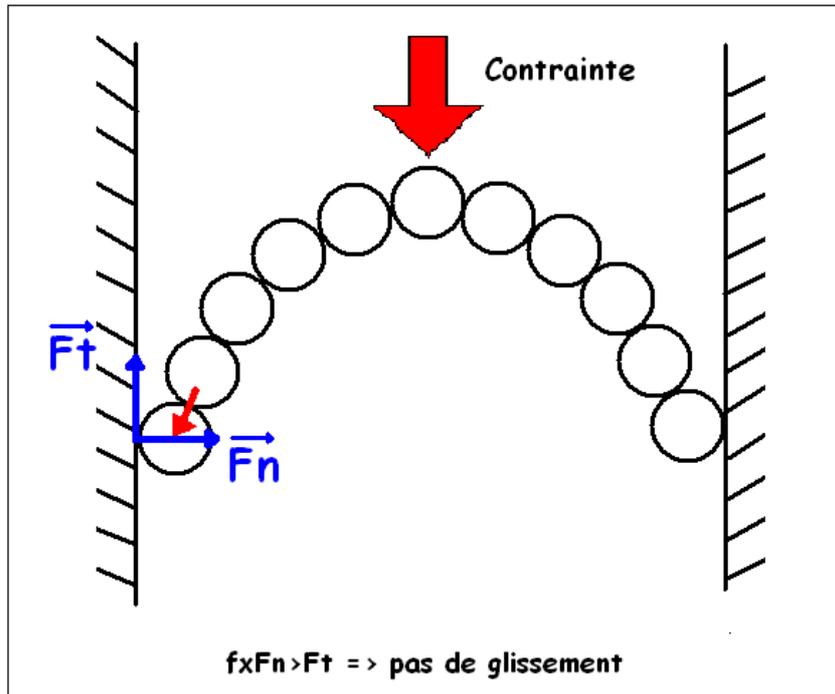


Figure 3 : Formation de voûtes

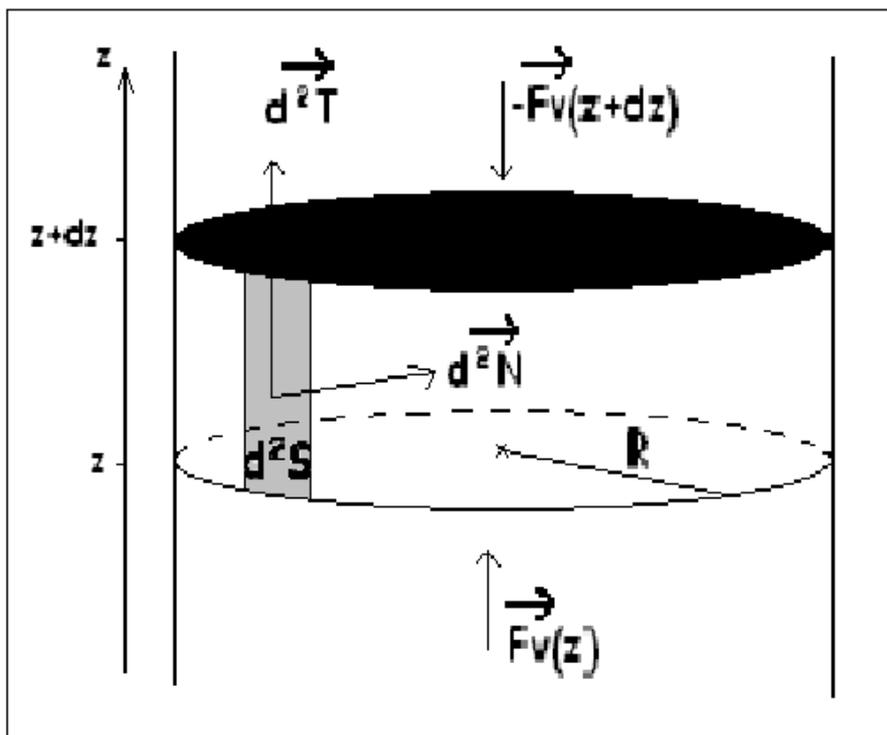


Figure 4 : Notations du modèle de Janssen

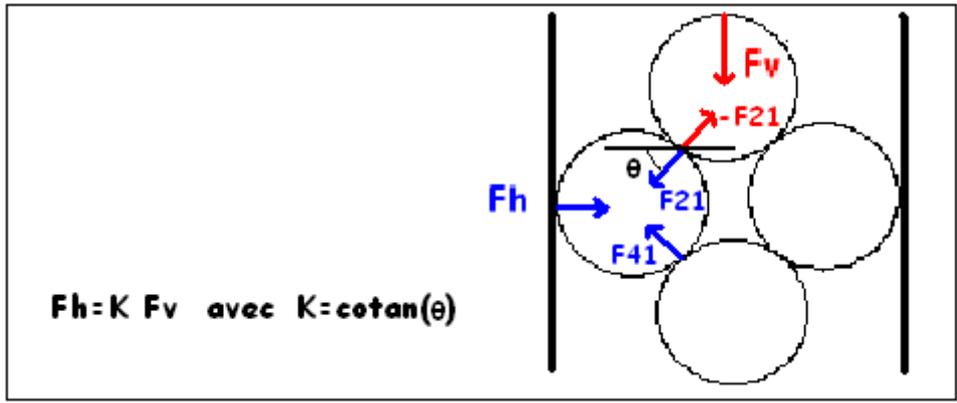


Figure 5 : Coefficient de Janssen

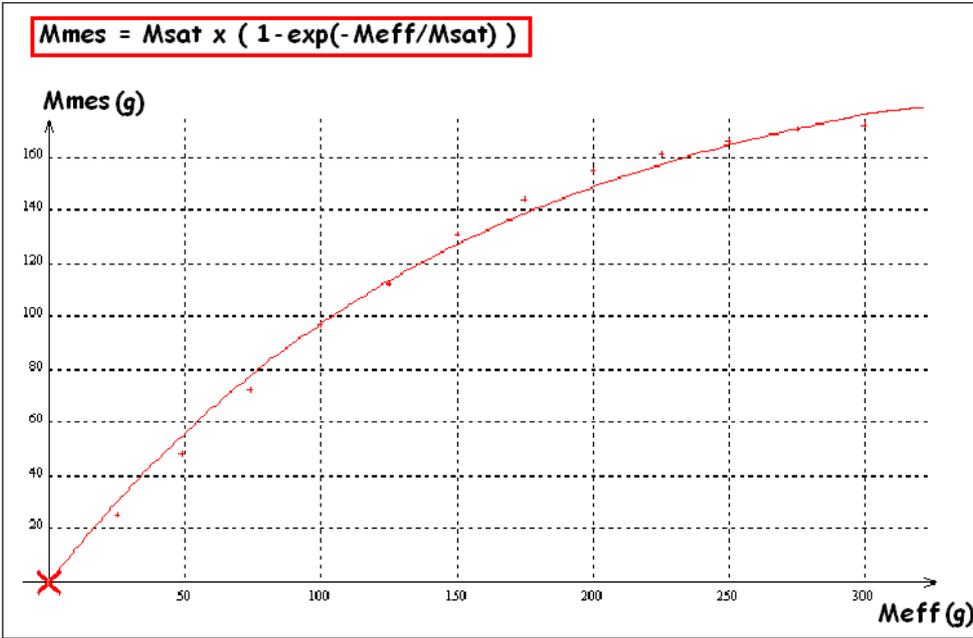


Figure 6 : Résultats des mesures sur l'effet Janssen

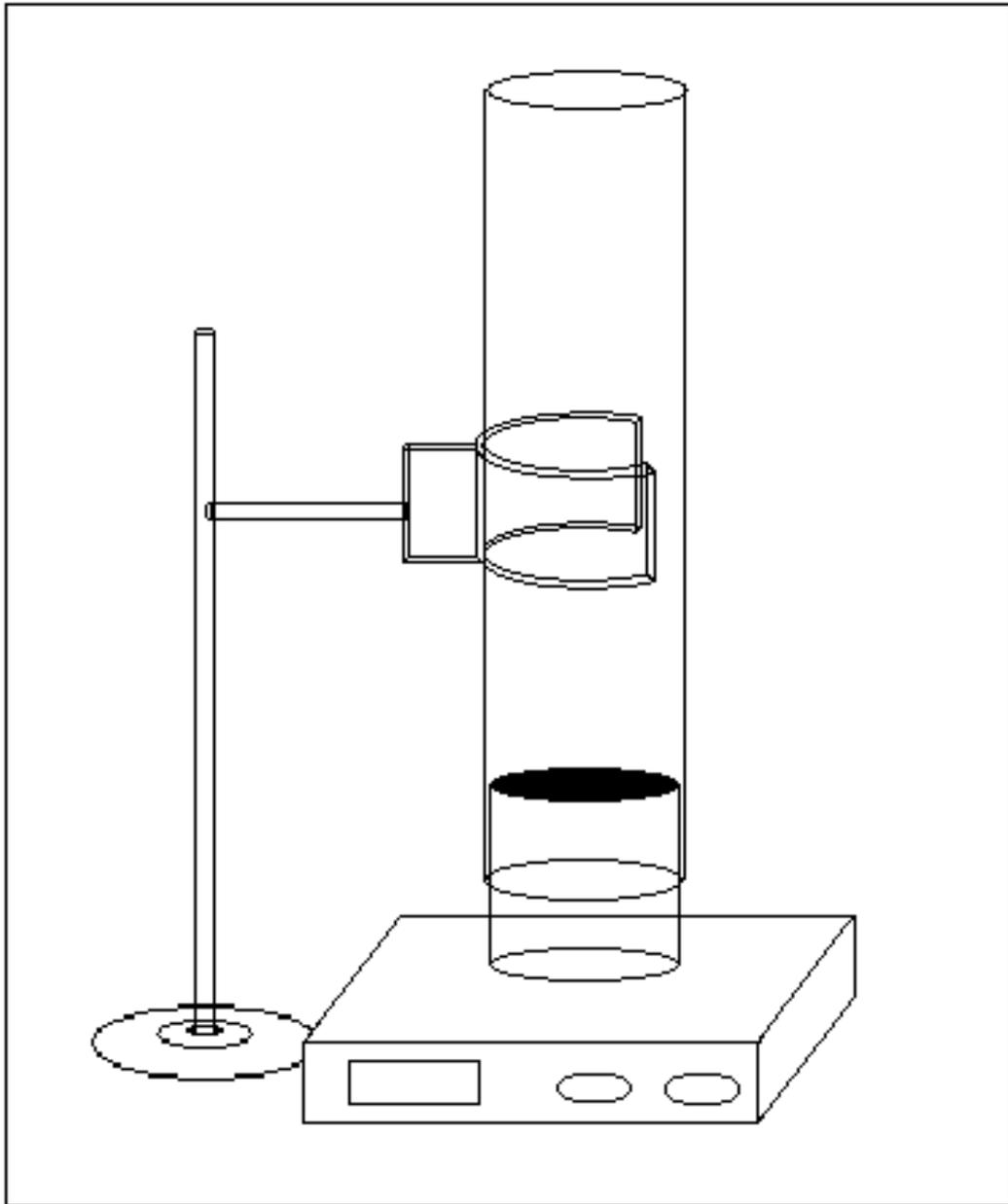


Figure 7 : Montage de mesure sur l'effet Janssen

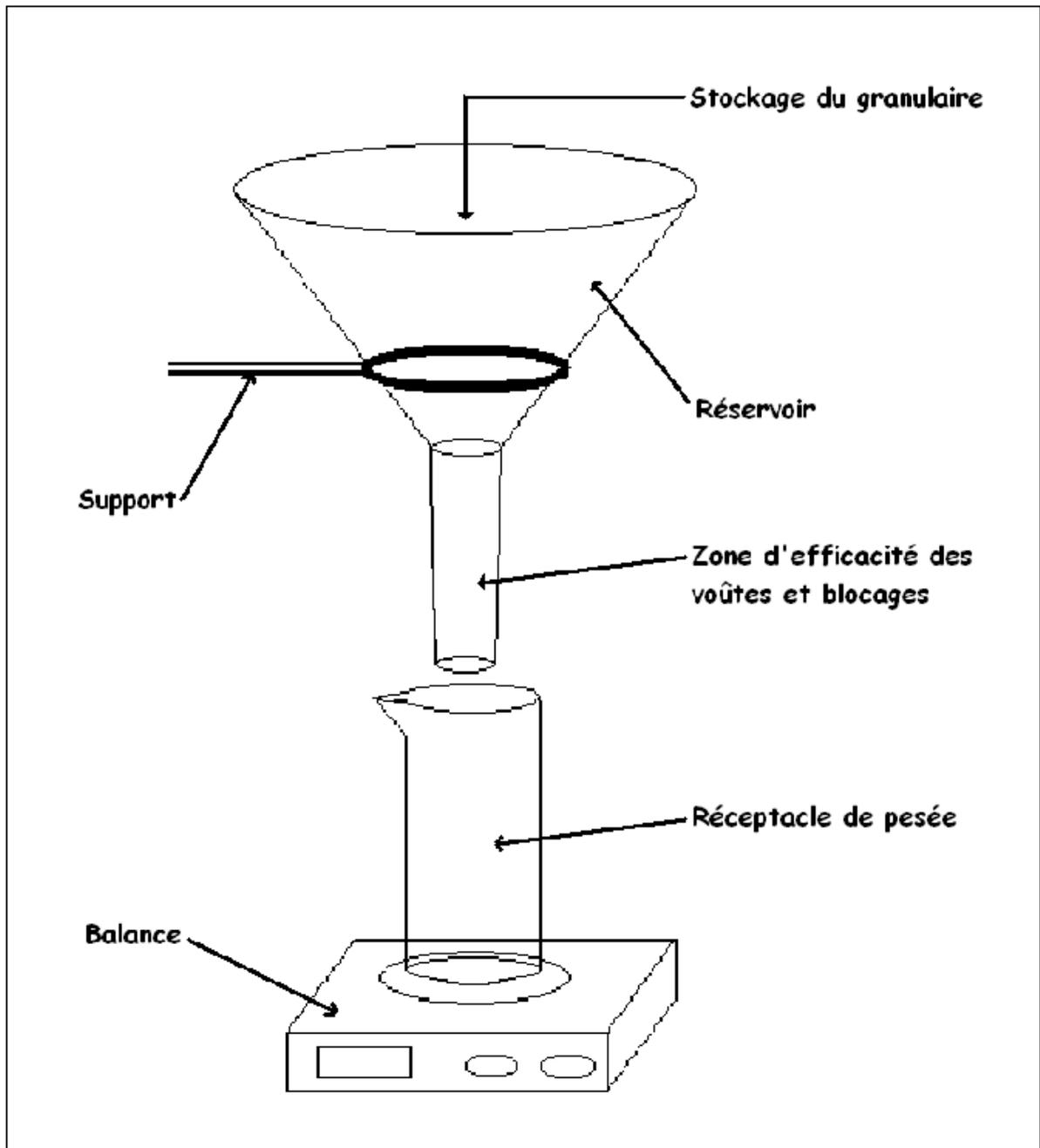


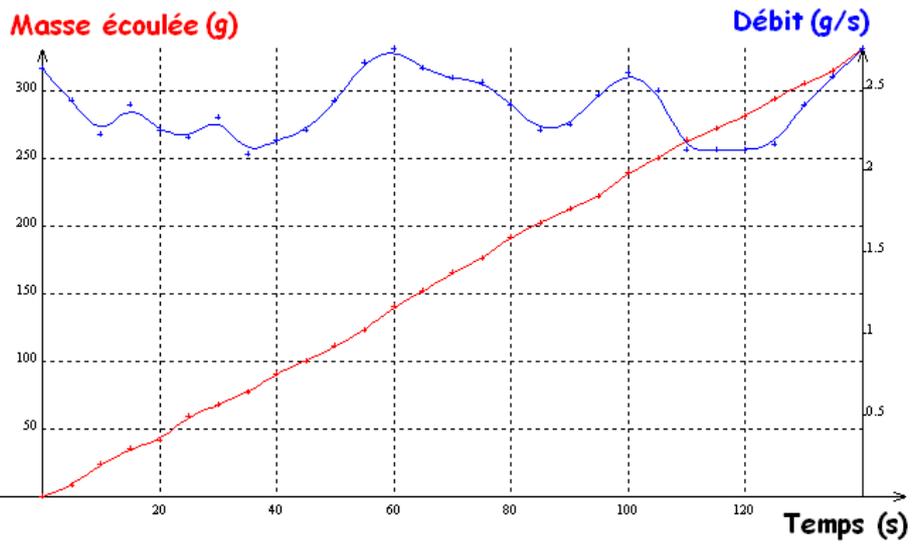
Figure 8 : Montage de mesures en écoulement



Figure 9 : Montage réel

Avec du sable

Diamètre d'évacuation : 5mm



Avec des billes de verre

Diamètre des billes : 1mm / Diamètre d'évacuation : 11 mm

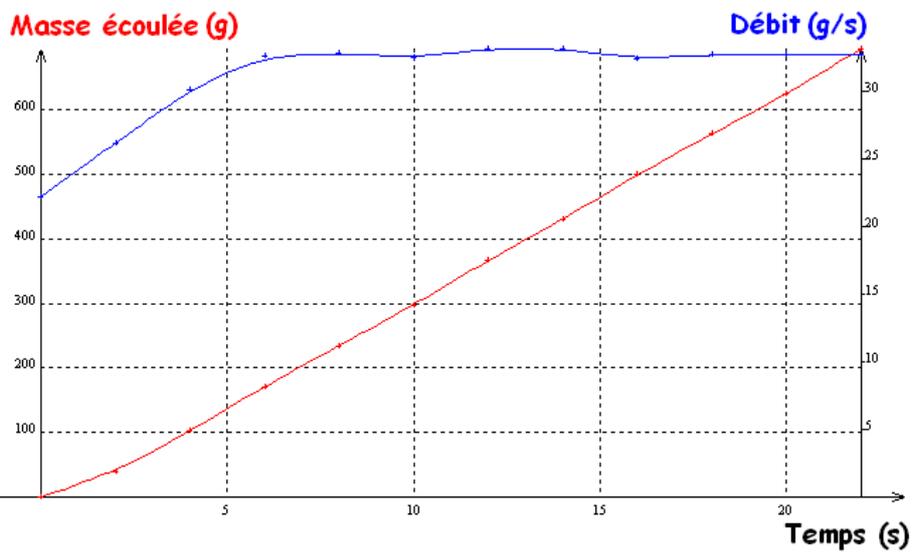
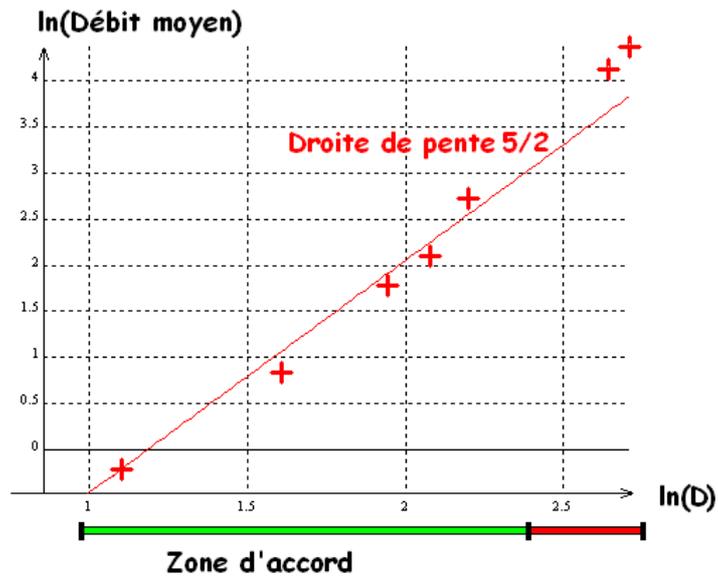


Figure 10 : Résultats expérimentaux

Avec le sable (Ouverture de diamètre D) :



Avec les billes (de diamètre 1mm) :

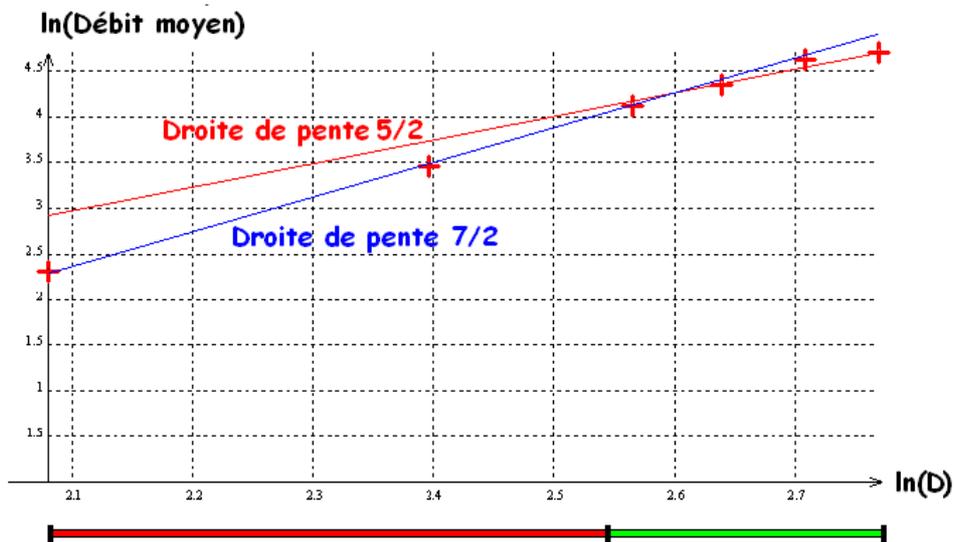


Figure 11 : Courbes bilan