Relations binaires

1 Produits cartésiens et graphes

1.1 Produit cartésien $E \times F$

Soient E et F deux ensembles non vides.
$E \times F = \{(x; y) \ / \ x \in E \text{ et } y \in F\}$
Si $E = F$, $\quad E \times F = E^2$ (carré cartésien)

Soit $(a; b) \in E \times F$.
a est la première coordonnée du couple $(a; b)$
b est la deuxième coordonnée du couple $(a; b)$

$((x; y); (x'; y')) \in (E \times F)^2$
$(x; y) = (x'; y') \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$
$(x; y) \neq (x'; y') \Longleftrightarrow x \neq x' \text{ ou } y \neq y'$

1.2 Graphe dans $E \times F$

On appelle graphe dans $E \times F$ tout sousensemble de $E \times F$

exemple:
$E = \{1; 2; 3\}$
$F = \{a; b\}$
$G = \{(1; a); (2; a)\}$ est un graphe dans $E \times F$

2 Relations binaires

2.1 Définition

Soient E et F deux ensembles non vides.
On établit une relation binaire notée $\mathcal{R}$ de E dans F en énonçant une propriété que vérifie ou non un couple quelconque $(x; y) \in E \times F$
La relation binaire $\mathcal{R}$ est donc une fonction à valeurs booléennes sur $E \times F$.
On peut aussi la définir comme un triplet $(E; F; G)$ où G est un graphe dans $E \times F$.
exemple:
$E = F = \mathbb{R}$
$\mathcal{R}$: x est le double de y
$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x = 2y$

$\mathcal{R} : \leq$
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leq y$

2.2 Graphe d'une relation binaire

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E \times F$.
Le graphe de la relation binaire $\mathcal{R}$ est $G_{\mathcal{R}} = \{(x;y) \in E \times F\ /\ x\mathcal{R}y\}$

$G_{\mathcal{R}} \subset E \times F$ donc tout graphe de relation binaire est un graphe.

Soit G un graphe. $G \subset E \times F$
Définissons $\mathcal{R}$ par:
$\forall (x;y) \in E \times F,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (x;y) \in G$
Par définition G est le graphe de la relation binaire $\mathcal{R}$, donc tout graphe est un graphe de relation binaire.

Conclusion: un graphe caractérise une relation binaire.

3 Relations binaires remarquables

3.1 Qualités possibles d'une relation binaire de E dans E

3.1.1 Réflexive

$\mathcal{R}$ est réflexive $\Longleftrightarrow \forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
$\{(x;x)\ /\ x \in E\} \subset G_{\mathcal{R}}$

3.1.2 Symétrique

$\mathcal{R}$ est symétrique $\Longleftrightarrow \forall (x;y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$

3.1.3 Transitive

$\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si pour tout $(x;y;z) \in E^3$,

$$\left.\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right\} \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

3.1.4 Antisymétrique

$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si pour tout $(x;y) \in E^2$,

$$\left.\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y$$

remarque: si $\mathcal{R}$ est symétrique, antisymétrique et de graphe non vide, $\mathcal{R}$ est une relation d'égalité.

3.2 Relation d'équivalence

3.2.1 Définition

Une relation d'équivalence sur E est une relation binaire de E dans E réflexive, symétrique et transitive.

3.2.2 Classe d'équivalence

Soit $a \in E$.
La classe d'équivalence de a est $\dot{a} = \{x \in E \ / \ a\mathcal{R}x\}$
$\forall x \in \dot{a}$ on dit que x est équivalent à a, ou que x est un représentant de $\dot{a}$.

3.2.3 Propriétés des classes d'équivalence

propriété 1: $\forall a \in E,\ \dot{a} \neq \emptyset$ car $a \in \dot{a}$ (par réflexivité)

propriété 2: si $b \in \dot{a}$, alors $\dot{a} = \dot{b}$

Démonstration :
$b \in \dot{a}$ donc $a\mathcal{R}b$
$\forall x \in \dot{a},\ a\mathcal{R}x$ donc $x\mathcal{R}a$ par symétrie
$x\mathcal{R}a$ et $a\mathcal{R}b$ donc $x\mathcal{R}b$ par transitivité, et donc $x \in \dot{b}$
On a donc: $\forall x \in \dot{a},\ x \in \dot{b}$, on en déduit: $\dot{a} \subset \dot{b}$
On démontre de même que $\dot{b} \subset \dot{a}$, et donc que $\dot{a} = \dot{b}$

3.2.4 Théorème

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E non vide. L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forme une partition de E.

Démonstration:
De la propriété 1, on déduit $E = \bigcup\limits_{a \in E} \dot{a}$
De la propriété 2, on déduit $\dot{a} \neq \dot{b} \Longrightarrow \dot{a} \cap \dot{b} = \emptyset$

exemple:
$E = \mathbb{Z}$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$
$\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \equiv y\,[n]$
$\mathcal{R}$ est la relation de congruence modulo n.

$\dot{0} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 0\,[n]\}$
$\dot{0}$ = ensemble des multiples de n dans $\mathbb{Z}$

$\dot{1} = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 1\,[n]\}$
$\dot{1}$ = ensemble des entiers relatifs qui ont pour reste 1 dans la division euclidienne par n.

Ensembles des classes $= \{\dot{0}; \ldots ; \widehat{\dot{n-1}}\}$

3.2.5 Réciproque

Etant donnée une partition $(E_i)_{i\in I}$ de $E \neq \emptyset$, il existe une unique relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E dont les classes d'équivalences sont exactement les E_i.

Démonstration:
Si une telle relation d'équivalence existe, alors on a nécessairement:
$\forall (x;y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists\, i \in I$ tel que $(x;y) \in {E_i}^2$
L'unicité est donc assurée, il faut maintenant montrer que l'on a bien défini une relation d'équivalence.

$\forall x \in E,\ \exists\ i \in I$ tel que $x \in E_i$ car les $(E_i)_{i\in I}$ forment un recouvrement de E.
On a donc $x\mathcal{R}x$ pour tout x de E. $\mathcal{R}$ est bien réflexive.

La symétrie de $\mathcal{R}$ découle directement de la symétrie de sa définition.

Supposons $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
$\exists\, i \in I$ tel que $(x;y) \in {E_i}^2$
$\exists\, j \in I$ tel que $(y;z) \in {E_j}^2$
On a donc $y \in E_i$ et $y \in E_j$. Or les E_i sont disjoints, donc $i = j$
On en déduit $x\mathcal{R}z$, et donc la transitivité de $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive: c'est bien une relation d'équivalence.

3.2.6 Ensemble quotient

Soit $E \neq \emptyset$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
L'ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ est $E_{/\mathcal{R}} = \{\dot{a}\ /\ a \in E\}$ = ensemble des classes d'équivalence.

exemple:
$E = \mathbb{R}$
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$
La relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive, c'est bien une relation d'équivalence.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dot{x} = \{y \in \mathbb{R}\ /\ x^2 + x = y^2 + y\}$
$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R}\ /\ (x-y)(x+y+1) = 0\}$
$\dot{x} = \{y \in \mathbb{R}\ /\ y = x \text{ ou } y = -1-x\}$
$\dot{x} = \{x; -1-x\}$
$E_{/\mathcal{R}} = \{\{x; -1-x\}\ /\ x \in \mathbb{R}\}$

3.3 Relation d'ordre

3.3.1 Définition

Une relation d'ordre sur $E \neq \emptyset$ est une relation binaire de E dans E réflexive, transitive et antisymétrique. On dit alors que E est ordonné.

exemples:
$\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
$<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (non réflexive).

3.3.2 Ordre total et ordre partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E si et seulement si deux éléments quelconques de E sont comparables par $\mathcal{R}$.
$\Longleftrightarrow \forall (x;y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$
Si $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total, on dit que c'est une relation d'ordre partiel.

$\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.
$\subset$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total sur E, E est dit totalement ordonné par $\mathcal{R}$.
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur E, E est dit partiellement ordonné par $\mathcal{R}$.

3.3.3 Vocabulaire

	$\mathbb{R}, \leq$	$E, \mathcal{R}$
segment $[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x$ et $x \leq b\}$	$\{x \in E \ / \ a\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}b\}$
$]a;b[$	$[a;b] - \{a;b\}$	$[a;b] - \{a;b\}$
$M =$ majorant de A	$A \subset \mathbb{R}, \ M \in \mathbb{R}$ $\forall x \in A, \ x \leq M$	$A \subset E, \ M \in E$ $\forall x \in A, \ x\mathcal{R}M$
$m =$ minorant de A	$m \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in A, \ m \leq x$	$m \in E$ et $\forall x \in A, \ m\mathcal{R}x$
maximum de A $Max(A)$	$Max(A) \in A$ $\forall x \in A, \ x \leq Max(A)$	$Max(A) \in A$ $\forall x \in A, \ x\mathcal{R}Max(A)$
minimum de A $Min(A)$	$Min(A) \in A$ $\forall x \in A, \ Min(A) \leq x$	$Min(A) \in A$ $\forall x \in A, \ Min(A)\mathcal{R}x$
$N =$ élément maximal	$N \in A$ $\forall x \in A, \ (N \leq x \Longrightarrow x = N)$	$N \in A$ $\forall x \in A, \ (N\mathcal{R}x \Longrightarrow x = N)$
$n =$ élément minimal	$n \in A$ $\forall x \in A, \ (x \leq n \Longrightarrow x = n)$	$n \in A$ $\forall x \in A, \ (x\mathcal{R}n \Longrightarrow x = n)$
borne supérieure de A $Sup(A)$	$\forall x \in A, \ x \leq Sup(A)$ $\forall y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, \ x \leq y$ on a $Sup(A) \leq y$	$\forall x \in A, \ x\mathcal{R}Sup(A)$ $\forall y \in E$ tel que $\forall x \in A, \ x\mathcal{R}y$ on a $Sup(A)\mathcal{R}y$
borne inférieure de A $Inf(A)$	$\forall x \in A, \ Inf(A) \leq x$ $\forall y \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, \ y \leq x$ on a $y \leq Inf(A)$	$\forall x \in A, \ Inf(A)\mathcal{R}x$ $\forall y \in E$ tel que $\forall x \in A, \ y\mathcal{R}x$ on a $y\mathcal{R}Inf(A)$

remarques:
$Max(A)$, s'il existe, est un majorant de A appartenant à A
$Min(A)$, s'il existe, est un minorant de A appartenant à A
$Sup(A)$, s'il existe, est le plus petit des majorants de A
$Inf(A)$, s'il existe, est le plus grand des minorants de A
$Sup(A)$ et $Inf(A)$ peuvent exister sans appartenir à A

exemples:
$E = \mathbb{R}^2$
$(a;b)\mathcal{R}(c;d) \Longleftrightarrow (a \leq c)$ et $(b \leq d)$
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{R}^2$

$A_1 = \left[0; \frac{1}{4}\right] \times \left[\frac{3}{4}; 1\right]$
$A_2 = \left[\frac{3}{4}; 1\right] \times \left[0; \frac{1}{4}\right]$
$A = A_1 \cup A_2$
$A \subset \mathbb{R}^2$ et $A \neq \emptyset$

$(2; 2)$ est un majorant de A
$(-1; -1)$ est un minorant de A
A n'a ni minimum, ni maximum.
$\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ et $\left(1; \frac{1}{4}\right)$ sont les éléments maximaux de A
$\left(0; \frac{3}{4}\right)$ et $\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ sont les éléments minimaux de A

3.3.4 Propriétés:

Soit $E \neq \emptyset$ ordonné par $\mathcal{R}$
Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$

propriété 1: le maximum de A, s'il existe, est unique.
Démonstration:
Supposons qu'il existe a et a' deux maxima.
a est un maximum et $a' \in A$, donc $a'\mathcal{R}a$
a' est un maximum et $a \in A$, donc $a\mathcal{R}a'$
$a'\mathcal{R}a$ et $a\mathcal{R}a'$, donc $a = a'$

propriété 2: le minimum de A, s'il existe, est unique.
Démonstration similaire.

propriété 3: si la borne supérieure de A existe, elle est unique
Démonstration:
Supposons qu'il existe a et a' deux bornes supérieures.
a' est un majorant et a est une borne supérieure, donc $a\mathcal{R}a'$
a est un majorant et a' est une borne supérieure, donc $a'\mathcal{R}a$
$a'\mathcal{R}a$ et $a\mathcal{R}a'$, donc $a = a'$

propriété 4: si la borne inférieure de A existe, elle est unique
Démonstration similaire.

propriété 5: si $Max(A)$ existe, alors $Sup(A)$ existe et $Max(A) = Sup(A)$
Démonstration:
$Max(A)$ est un majorant de A
Soit M un majorant quelconque de A
$Max(A) \in A$, donc $Max(A)\mathcal{R}M$
$Max(A)$ est bien le plus petit des majorants, donc $Sup(A)$ existe et
$Sup(A) = Max(A)$

propriété 6: si $Min(A)$ existe, alors $Inf(A)$ existe et $Min(A) = Inf(A)$
Démonstration similaire.

propriété 7: si $Max(A)$ existe, c'est l'unique élément maximal de A
Démonstration:
$Max(A) \in A$
Soit $x \in A$ tel que $Max(A)\mathcal{R}x$
$x \in A$, donc $x\mathcal{R}Max(a)$. On a $Max(A)\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}Max(a)$ donc $x = Max(A)$
$Max(A)$ est donc bien un élément maximal.
Soit y un autre élément maximal de A. $y\mathcal{R}Max(A)$, donc $y = Max(A)$

propriété 8: si $Min(A)$ existe, c'est l'unique élément minimal de A
Démonstration similaire.

propriété 8: si A est fini, et $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, alors $Max(A)$, $Sup(A)$, $Min(A)$ et $Inf(A)$ existent et $Max(A) = Sup(A)$, $Min(A) = Inf(A)$