Lois de composition interne

1 Définition

Soit E un ensemble non vide.
On appelle loi de composition interne sur E toute application f de $E \times E$ dans E.

$f : E \times E \to E$
$(x; y) \mapsto f(x; y) \in E$

On associe généralement un symbole à la loi, par exemple $\top$. On utilise alors la notation : $f(x; y) = x \top y$

exemples:
Lois $+$ et $\times$ pour les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
Lois PGCD et PPCM dans $\mathbb{N}$

2 Magma

Soit E un ensemble muni de la loi de compostition interne $\top$.
On dit alors que le couple $(E; \top)$ est un magma.

exemples: $(\mathbb{R}; +)$, $(\mathbb{R}; \times)$

3 Qualités possibles d'une loi

Soit $(E; \top)$ un magma.

3.1 associative

La loi $\top$ est associative $\Longleftrightarrow \forall (x; y; z) \in E^3,\ (x \top y) \top z = x \top (y \top z) = x \top y \top z$

remarque:
Si $(E; \top)$ est un magma associatif, on peut définir sans ambiguité l'itéré n$^{\grave{e}me}$ d'un élément de E :
$\top^n x = \underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n}$
ou de manière plus rigoureuse: $\top^1 x = x$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \top^{n+1} x = (\top^n x) \top x$

exemples:
Dans $(\mathbb{R};\times)$: $\times^n x = x^n$
Dans $(\mathbb{R};+)$: $+^n x = n.x$

3.2 commutative

La loi $\top$ est commutative $\iff \forall (x;y) \in E^2,\ x\top y = y\top x$

remarque: si la loi $\top$ est associative et commutative, alors le composé d'un nombre fini quelconque d'éléments de E par $\top$ est indépendant de l'ordre des éléments.

3.3 distributive

Soient $(E;\top)$ et $(E;\perp)$ deux magmas.

La loi $\top$ est distributive par rapport à $\perp \iff \forall (x;y;z) \in E^3$,
$x\top(y\perp z) = (x\top y)\perp(x\top z)$ et $(y\perp z)\top x = (y\top x)\perp(z\top x)$

remarque: Si la loi $\top$ est commutative, les deux égalités sont équivalentes.

4 Eléments remarquables

4.1 Elément idempotent

$x \in E$ est idempotent $\iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \top^n x = x$

Théorème: $x \in E$ idempotent $\iff x\top x = x$
Démonstration évidente.

remarques:
On a pas besoin de l'associativité pour définir l'itéré n$^{\text{ème}}$ d'un élément idempotent.
On dit que la loi $\top$ est idempotente si tous les éléments de E sont idempotents pour $\top$.

4.2 Elément régulier

$a \in E$ régulier à droite $\iff \forall (x;y) \in E^2,\ (x\top a = y\top a \Longrightarrow x = y)$
$a \in E$ régulier à gauche $\iff \forall (x;y) \in E^2,\ (a\top x = a\top y \Longrightarrow x = y)$
$a \in E$ régulier $\iff a$ régulier à droite et à gauche

exemples:
Dans $(\mathbb{R};+)$, tous les éléments sont réguliers.
Dasn $(\mathbb{R};\times)$, tous les éléments de $\mathbb{R}^*$ sont réguliers.

Théorème:
Soit $(E;*)$ un magma associatif.
Soit $(x;y) \in E^2$.
x et y réguliers à gauche $\Longrightarrow x * y$ régulier à gauche
même énoncé avec régulier à droite
même énoncé avec régulier

Démonstration :
Soit $(E;*)$ un magma associatif.
Soit $(x;y) \in E^2$ réguliers à gauche.
Supposons que nous ayons $(a;b) \in E^2$ et $(x * y) * a = (x * y) * b$
La loi $*$ est associative donc $x * (y * a) = x * (y * b)$
x est régulier à gauche, donc $y * a = y * b$
y est régulier à gauche donc $a = b$
$x * y$ est donc bien régulier à gauche.

4.3 Elément neutre

e élément neutre de $(E;*) \Longleftrightarrow e \in E$ et $\forall x \in E,\ x * e = e * x = x$

remarque: si $*$ est commutative, $x * e = x$ est suffisant.

exemples:
0 est un élément neutre pour $(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Q};+)$, $(\mathbb{R};+)$, $(\mathbb{C};+)$
1 est un élément neutre pour $(\mathbb{N};\times)$, $(\mathbb{Z};\times)$, $(\mathbb{Q};\times)$, $(\mathbb{R};\times)$, $(\mathbb{C};\times)$

Théorème: e élément neutre de $(E;*) \Longrightarrow e$ unique, régulier, idempotent

Démonstration:
e unique:
Soit e' un autre élément neutre. $e * e' = e = e'$

e régulier:
Soit $(x;y) \in E^2$.
$x * e = y * e \Longrightarrow x = y$
$e * x = e * y \Longrightarrow x = y$

e idempotent: $e * e = e$

4.4 Elément absorbant

f élément absorbant de $(E;*) \Longleftrightarrow f \in E$ et $\forall x \in E,\ x * f = f * x = f$

exemples:
0 est un élément absorbant pour $(\mathbb{N};\times)$
1 est un élément absorbant pour $(\mathbb{N};PGCD)$

Théorème: f élément absorbant de $(E;*) \Longrightarrow f$ unique

Démonstration:
Soient f et f' deux éléments absorbants: $f * f' = f = f'$

remarque: On peut définir un élément absorbant à gauche, et un élément absorbant à droite (pareil pour l'élément neutre).

4.5 Elément symétrique

Soit $(E; *)$ un magma muni de l'élément neutre e.
$x \in E$ admet x' comme symétrique à gauche pour la loi $* \Longleftrightarrow x' * x = e$
$x \in E$ admet x' comme symétrique à droite pour la loi $* \Longleftrightarrow x * x' = e$
$x \in E$ admet x' comme symétrique pour la loi $* \Longleftrightarrow x' * x = x * x' = e$

Théorème 1:
Soit $(E; *)$ un magma *associatif* muni de l'élément neutre e.
$x \in E$ admet x' comme symétrique $\Longrightarrow x$ est régulier et x' est unique

Démonstration:
x régulier:
Soit $(a; b) \in E^2$
$a * x = b * x \Longrightarrow (a * x) * x' = (b * x) * x' \Longrightarrow a * (x * x') = b * (x * x') \Longrightarrow a = b$
$x * a = x * b \Longrightarrow x' * (x * a) = x' * (x * b) \Longrightarrow (x' * x) * a = (x' * x) * b \Longrightarrow a = b$

x' unique:
Supposons qu'il existe x'' tel que x admette x'' pour symétrique.
On a $x * x' = x * x'' = e$. Comme x est régulier à gauche, on obtient : $x' = x''$

Théorème 2:
Soit $(E; *)$ un magma muni de l'élément neutre e.
$x \in E$ admet x' comme symétrique à gauche $\Longrightarrow x'$ admet x comme symétrique à droite
$x \in E$ admet x' comme symétrique à droite $\Longrightarrow x'$ admet x comme symétrique à gauche
$x \in E$ admet x' comme symétrique $\Longrightarrow x'$ admet x comme symétrique

Démonstration évidente.

Théorème 3:
Soit $(E; *)$ un magma *associatif* muni de l'élément neutre e.

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \text{ admet } x' \text{ comme symétrique à gauche} \\ y \in E \text{ admet } y' \text{ comme symétrique à gauche} \end{array}\right\} \Longrightarrow x{*}y \text{ admet } y'{*}x' \text{ comme symétrique à gauche}$$

Démonstration:
$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * x) * y = y' * e * y = y' * y = e$

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \text{ admet } x' \text{ comme symétrique à droite} \\ y \in E \text{ admet } y' \text{ comme symétrique à droite} \end{array}\right\} \Longrightarrow x{*}y \text{ admet } y'{*}x' \text{ comme symétrique à droite}$$

Démonstration équivalente.

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \text{ admet } x' \text{ comme symétrique} \\ y \in E \text{ admet } y' \text{ comme symétrique} \end{array}\right\} \Longrightarrow x{*}y \text{ admet } y'{*}x' \text{ comme symétrique}$$

Démonstration équivalente.

Théorème 4:
Soit $(E;*)$ un magma *associatif* muni de l'élément neutre e.

$$\left.\begin{array}{l} x \in E \text{ admet } x' \text{ comme symétrique à droite} \\ y \in E \text{ admet } x'' \text{ comme symétrique à gauche} \end{array}\right\} \Longrightarrow x' = x'' \text{ et } x \text{ est donc symétrisable}$$

Démonstration:
On a: $x * x' = e$ et $x'' * x = e$.
$x'' * x * x' = (x'' * x) * x' = e * x' = x'$
$x'' * x * x' = x'' * (x * x') = x'' * e = x''$
d'où: $x' = x''$

5 Partie stable du magma $(E;*)$

$A \subset E$ est une partie stable $\Longleftrightarrow (A;*)$ est un magma
$\Longleftrightarrow \forall (x;y) \in A^2,\ x * y \in A$

exemple: Dans le magma $(\mathbb{N};+)$, $2\mathbb{N}$ est une partie stable.

6 Partie permise du magma $(E;*)$

$A \subset E$ est une partie permise $\Longleftrightarrow \forall (x;y) \in E \times A,\ x * y \in A$

exemples:
Dans le magma $(\mathbb{N};+)$, $2\mathbb{N}$ n'est pas une partie permise.
Dans le magma $(\mathbb{N};\times)$, $2\mathbb{N}$ est une partie permise.

7 Compatibilité entre une loi $*$ dans E et une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E

Soit $(E;*)$ un magma.
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
$\mathcal{R}$ et $*$ sont compatibles si et seulement si pour tout $(x;x';y;y') \in E^4$,

$$\left.\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ x'\mathcal{R}y' \end{array}\right\} \Longrightarrow (x * x')\mathcal{R}(y * y')$$

Théorème :
Si $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive, si $*$ est commutative, alors $\mathcal{R}$ et $*$ sont compatibles si et seulement si pour tout $(x;y;z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow (x*z)\mathcal{R}(y*z)$

Démonstration:
Si $\mathcal{R}$ et $*$ sont compatibles:
On prend $(x;y) \in E^2$ avec $x\mathcal{R}y$ et $z \in E$.
Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $z\mathcal{R}z$.
$x\mathcal{R}y$ et $z\mathcal{R}z$, donc avec la compatibilité on obtient: $(x*z)\mathcal{R}(y*z)$

Si pour tout $(x;y;z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow (x*z)\mathcal{R}(y*z)$:
Prenons $(x;x';y;y') \in E^4$ avec $x\mathcal{R}y$ et $x'\mathcal{R}y'$.
$x\mathcal{R}y$ donc $(x*x')\mathcal{R}(y*x')$
$x'\mathcal{R}y'$ donc $(x'*y)\mathcal{R}(y'*y)$, et par commutativité de $*$: $(y*x')\mathcal{R}(y*y')$
La transitivité nous donne alors: $(x*x')\mathcal{R}(y*y')$ et donc la compatibilité entre la relation binaire $\mathcal{R}$ et la loi $*$