Relations binaires : Exercices

1

Dans $\mathbb{R}$ on pose: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow cos(x) = cos(y)$.
Etablir que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence ?

2

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'ordre défini par:
$(x; y)\mathcal{R}(x'; y') \Longleftrightarrow (x \leq x')$ et $(y \leq y')$
Vérifier que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre total.
On note $A = \{(x; y) \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
A admet-il un maximum, un minimum ?
A admet-il une borne supérieure, une borne inférieure ?
Quels sont les éléments maximaux de A ?

3

Soit E un ensemble totalement ordonné par les deux relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ telles que:
$\forall(x; y) \in E^2, \ x\mathcal{R}y \Longrightarrow x\mathcal{S}y$
Etablir alors: $\mathcal{R} = \mathcal{S}$

4

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide E, supposée réflexive et transitive.
On définit dans E une nouvelle relation binaire $\mathcal{S}$ par:
$x\mathcal{S}y \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$
Etablir que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
On définit, dans $E_{/\mathcal{S}}$, une relation binaire $\mathcal{R}'$ par:
$\dot{x}\mathcal{R}'\dot{y} \Longleftrightarrow \forall(\alpha; \beta) \in \dot{x} \times \dot{y}, \ \alpha\mathcal{R}\beta$
Montrer que $\mathcal{R}'$ est une relation d'ordre sur $E_{/\mathcal{S}}$.

5

Dans $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire définie par:
$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x$ est solution de l'équation $X^2 - 2Xy + y^2 = 0$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence pour laquelle on déterminera $\dot{x}$.

6

Soit E un ensemble ordonné par $\leq$ (non d'ordre total nécessairement) tel que E admette un plus grand élément et que toute partie non vide de E admette une borne inférieure. Montrer que toute partie non vide de E admet alors une borne supérieure.