Lois de composition interne : Exercices

1

Dans l'ensemble $E = \{a; b; c\}$, on définit une loi interne $\times$ par:
$a \times a = b \times c = c \times b = a$
$b \times b = a \times c = c \times a = b$
$c \times c = a \times b = b \times a = c$
Quelles sont les propriétés de cette loi ?

2

Soit A un ensemble non vide muni de deux lois $\star$ et $\circ$, admettant le même élément neutre e, telles que:
$\forall (x; y; z; t) \in A^4,\ (x \star y) \circ (z \star t) = (x \circ z) \star (y \circ t)$
Etablir que $\star = \circ$, que la loi $\star$ est associative et commutative.

3

Dans $\mathbb{R}$, on définit: $x * y = x + y - x \times y$
Calculer $*^n x$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4

Dans $\mathbb{R}$, on considère la famille des lois internes $\top$ définies par:
$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ x \top y = kxy + k'(x + y)$, où $(k; k') \in \mathbb{R}^2$
Déterminer les lois $\top$ qui sont associatives.

5

Soit $(E; *)$ un magma tel que:
$\forall (x; y) \in E^2,\ x * (x * y) = (y * x) * x = y$
Montrer alors que $*$ est une loi commutative.

6

E étant un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ telle que:
$\forall (x; y) \in E^2,\ Inf\{x; y\}$ existe.
On pose $x * y = Inf\{x; y\}$
Vérifier que la loi $*$ est commutative, associative, idempotente.

Inversement, soit E un ensemble non vide dans lequel on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x * y = x$
où $*$ est une loi interne commutative, associative et idempotente.
Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre pour laquelle $Inf\{x;y\} = x * y$

7

Soit $(E;\perp)$ un magma. Pour tout $a \in E$, on définit les applications:
$f_a : x \mapsto x\perp a$
$g_a : x \mapsto a\perp x$
a) Que signifie $f_a = g_a = Id_E$?
b) Que signifie: $\forall a \in E,\ f_a = g_a$?
c) On suppose $\perp$ associative, admettant e pour élément neutre.
Soit $a \in E$ symétrisable. Que peuton dire alors de f_a et g_a ?
d) Que signifie f_a et g_a injectives ?
e) On suppose $\perp$ associative, commutative et qu'il existe $a \in E$ tel que f_a soit bijective. Montrer alors que $\perp$ admet un élément neutre e. Etablir que si, de plus, f_b est surjective pour tout b, alors $(E;\perp)$ est un groupe (i.e., ici, tout élément b de E admet un symétrique).