Loi de composition interne, groupes

Troll

6 juillet 2006

Table des matières

1 Cours

1.1 Loi de composition interne (lci)

Etant donné un ensemble E, on appelle loi de composition interne toute application de E$\times$E dans E. Notation : si f est une lci sur E, f(x,y) est plutôt noté x+y ou x.y ou x*y ou xTy ou x$\cup$y, etc. (lois plus, fois, étoile, truc, union, etc.)

1.2 Associativité

Soit un ensemble E et * une lci sur E ; on dit que * est associative ssi $\forall$ (x,y,z) $\in$ E^3, $x*(y*z) = (x*y)*z$.

1.3 Elément neutre

Soit un ensemble E et * une lci associative sur E ; on dit que e est l'élément neutre de * ssi $\forall$ x $\in$ E, x*e = x et e*x=x.

1.4 Théorème

Si l'élément neutre existe, il est unique.

1.5 Commutativité

Soit un ensemble E et * une lci sur E ; on dit que * est commutative ssi $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, $x*y = y*x$.

1.6 Distributivité

Soit un ensemble E et * et T deux lci sur E ; on dit que * est distributive par rapport à T ssi $\forall$ (x,y,z) $\in$ E^3, $x*(yTz) = (x*y)T(x*z) et (xTy)*z = (x*z)T(y*z)$.

1.7 Symétrique

Soit un ensemble E et * une lci sur E admettant un élément neutre e ; $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, y est le symétrique de x par rapport à * ssi x*y=e et y*x=e (remarque : on dit que x est symétrisable).

1.8 Théorème

Si un élément est symétrisable, son symétrique est unique.

1.9 Groupe

Soit E un ensemble et * une loi de composition interne. (E,*) est un groupe ssi :
* est associative
* admet un élément neutre
tout élément de E est symétrisable avec la loi *.
Remarque : si * est commutative, (E,*) est dit "groupe commutatif" ou "groupe abélien"

2 Exercices

2.1 Exercice 1

Les structures suivantes sont-elles des groupes ? (N,+) (N,x) (Z,+) (Z,x) (Q,+) (Q,x)

2.2 Exercice 2

Démontrer les deux théorèmes.

2.3 Exercice 3

On note * la lci sur R telle que $\forall$ (x,y) $\in$ R^2,x*y = x+y - x.yLa loi * est-elle associative, commutative ? Admet-elle un élément neutre à droite ou à gauche ?

2.4 Exercice 4

Soit (G,*) un groupe dont on note e l'élément neutre. Soit A un sous-ensemble de G tel que e $\in$ A et $\forall$(x,y)$\in$A^2, $x * y$$\in$A. Montrez que (A,*) est un groupe.

2.5 Exercice 5

Soit E un ensemble. On appelle P(E) l'ensemble des ensembles inclus dans E. On définit la lci Δ par $\forall$ (X,Y) $\in$ P(E)^2, $X\Delta$Y=(X$\cup$Y)-(X$\cap$Y)
(Δ s'appelle la différence symétrique). Montrez que (P(E),Δ) est un groupe abélien.