Bac S physique 2007 Exercice I : La Galiote (Partie Physique)

Action de la poudre à canon sur le boulet

On peut justifier la phrase soulignée par la *troisième loi de Newton*, dite aussi *principe d'action et réaction*. Elle peut s'énoncer ainsi : *Dans une situation quelconque, si un objet A exerce sur un objet B une force $\vec{F}_{A\rightarrow B}$, alors en retour l'objet B exerce sur A une force opposée et de même valeur : $\vec{F}_{B\rightarrow A} = -\vec{F}_{A\rightarrow B}$.*
Dans notre cas présent l'objet A est l'ensemble {Galiote+canon+gaz}, qui exerce une certaine force lors de l'explosion sur l'objet B, le boulet. Donc d'après la troisième loi de Newton, dans ce cas le boulet exerce une réaction opposée sur l'ensemble A, qui est de même valeur en norme. Voilà donc pourquoi la construction de la Galiote doit être très solide, car à chaque tir de canon ses fondations encaissent des forces considérables exercées par les boulets.

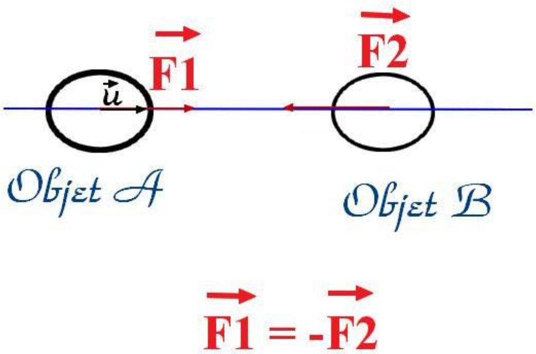

FIG. 1 – Troisième loi de Kepler

La trajectoire du boulet

2.1.1/ Le boulet est un solide immergé dans un fluide, l'air, de la part duquel il subit donc une poussée d'Archimède. La valeur de la poussée d'Archimède (on parle de valeur absolue et non de vecteurs) se calcule comme *le poids qu'aurait un volume d'air égal au volume du boulet.* Le boulet a un volume $V = 16dm^3 = 0.016m^3$, et l'air a une masse volumique $\rho = 1.3kg.m^{-3}$. Un volume V d'air aurait donc une masse : $m_a = \rho V$, et un poids $P_a = m_a g = \rho V g$. Le calcul donne : $P_a = 1.3 * 1.6 * 10^{-2} * 10 = 2.1 * 10^{-1}N$, qui est donc aussi par définition la valeur de la poussée d'Archimède subie par le boulet : $F_A = \rho V g = 2.1 * 10^{-1}N$.

2.1.2/ Le poids du boulet s'exprime simplement par : $P = mg$, et sa valeur numérique donne : $P = 100 * 10 = 1000N$.

2.1.3/ Vues les valeurs numériques trouvées, la valeur du poids du boulet est environ 5000 fois plus grande que la valeur de la poussée d'Archimède, *on est donc clairement dans le cas où l'on peut négliger la poussée d'Archimède devant le poids.*

2.1.4/ Un inventaire complet des forces s'exerçant sur le boulet donnerait : *Poids, Poussée d'Archimède, Frottements de l'air sur le boulet.* D'après ce qu'on vient de faire, les deux dernières forces sont ici considérées comme négligeables. Conclusion : *Le bilan des forces s'exerçant sur le boulet se réduit au poids !*

2.2.1/ On écrit la *deuxième loi de Newton pour le système boulet* : $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$, avec ici $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P}$, donc : $m\vec{a} = \vec{P}$. On va projeter cette équation sur les axes des x et des y, en regardant quelle composante sur chaque axe possède chaque vecteur intervenant. On regarde la décomposition du vecteur $\vec{a}$ dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) :

$\vec{a} : \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$

Le poids quant à lui est purement vertical, et n'a donc de composante que selon y. Par ailleurs, comme le vecteur unitaire de l'axe des y $\vec{j}$ est orienté vers le haut, mais que le poids pointe vers le bas, sa composante selon y sera négative. On a donc dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) :

$\vec{P} : \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

L'égalité vectorielle $m\vec{a} = \vec{P}$ équivaut donc, une fois décomposée dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$), à :

$\begin{pmatrix} m\frac{d^2x}{dt^2} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

Ce que l'on peut séparer en deux équations simples (non vectorielles) distinctes, concernant chacune ce qui se passe sur un des axes :

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases}$$

Soit en divisant tout par m :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

L'accélération selon x est nulle, l'accélération selon y est constante égale à $-g$.

On va maintenant intégrer ces équations différentielles à l'aide des conditions initiales connues, en se souvenant que $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})$, et de même pour y. On va donc d'abord chercher l'expression des fonctions $\frac{dx}{dt}(t)$ et $\frac{dy}{dt}(t)$, dont les dérivées sont contraintes par les équations écrites ci-dessus.

On a : $\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = 0$, donc si la dérivée de la fonction $\frac{dx}{dt}(t)$ vaut zéro, cela signifie que cette fonction est constante : $\frac{dx}{dt} = a$, où a est une constante à déterminer à partir des conditions initiales. Cette équation signifie que *la vitesse selon x est constante au cours du mouvement.*

On a également : $\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) = -g$, la dérivée de la fonction $\frac{dy}{dt}(t)$ est égale à une constante, donc si on veut trouver l'expression de $\frac{dy}{dt}(t)$, il faut trouver quelque chose qui, lorsqu'on la dérive, redonne cette constante $-g$. Cela donne $\frac{dy}{dt} = -gt + b$, où b est une autre constante à déterminer à partir des conditions initiales. Cette équation signifie que *la vitesse selon y varie linéairement avec le temps au cours du mouvement.*

Comme a et b sont des constantes, on peut calculer leur valeur à l'instant initial $t = 0$. Pour cela on va utiliser le fait qu'on connait ce que vaut le vecteur vitesse à $t = 0$. A l'instant initial le vecteur vitesse est $\vec{v_0}$, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On peut le décomposer dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) comme n'importe quel autre vecteur, et ses composantes font intervenir la *valeur* de la vitesse initiale v_0 et l'angle α :

$\vec{v_0} : \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

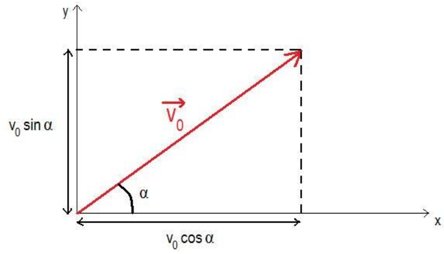

FIG. 2 – Composantes du vecteur vitesse initiale sur x et y

Notre expression de la vitesse doit impérativement redonner ces valeurs lorsque l'on prend $t = 0$. L'expression générale du vecteur vitesse au cours du mouvement dans le repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) est : $\vec{v}(t) : \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -gt+b \end{pmatrix}$ d'après les expressions trouvées.

Pour $t = 0$ on doit avoir $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0}$, soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

On a donc trouvé $a = v_0 \cos\alpha$ et $b = v_0 \sin\alpha$, et donc on connait l'expression générale du vecteur vitesse en fonction du temps : $\vec{v}(t) : \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$

On peut donc maintenant intégrer encore une fois les équations pour trouver les expressions de $x(t)$ et $y(t)$, car on sait que :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = & v_0 \cos\alpha \\ \frac{dy}{dt} = & -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

La fonction $x(t)$ a pour dérivée une constante, et la fonction $y(t)$ a pour dérivée une fonction affine. Ces deux fonctions doivent donc avoir pour expression :

$$\begin{cases} x(t) = & (v_0 \cos\alpha)t + c \\ y(t) = & \frac{-gt^2}{2} + (v_0 \sin\alpha)t + d \end{cases}$$

Où c et d sont deux autres constantes d'intégrations à déterminer.

On connait la position initiale du boulet : à $t = 0$, il se trouve à l'origine du repère, cela nous donne donc comme contraintes que : $x(t=0) = 0$, et $y(t=0) = 0$. En comparant avec les expressions obtenues pour les fonctions $x(t)$ et $y(t)$, on en déduit que $c = d = 0$.

D'où l'expression complète des fonctions $x(t)$ et $y(t)$, aussi appelées *équations horaires du mouvement* :

$$\begin{cases} x(t) = & (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = & \frac{-gt^2}{2} + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

2.2.2/ Obtenir l'équation de la trajectoire signifie *éliminer le temps dans les équations horaires obtenues*, afin de se ramener, depuis deux fonctions x et y dépendant du temps t, à une fonction y dont le paramètre sera x. On veut donc éliminer t de l'expression de y, et faire dépendre y de x. Pour cela, il suffit d'exprimer t en fonction de x à partir de la première équation : on a $x = (v_0 \cos\alpha)t$, donc également : $t = \frac{x}{(v_0 \cos\alpha)}$. On a donc exprimé t en fonction de x, expression que l'on peut maintenant reporter dans l'expression de y, en remplaçant t partout où il apparait par cette expression :

On a $y = \frac{-g}{2} * t^2 + (v_0 \sin\alpha) * t$, et $t = \frac{x}{(v_0 \cos\alpha)}$, donc : $y = \frac{-g}{2} * (\frac{x}{(v_0 \cos\alpha)})^2 + (v_0 \sin\alpha) * \frac{x}{(v_0 \cos\alpha)}$.
On voit donc bien apparaitre la forme demandée, qui correspond à l'équation d'une parabole que l'on voit sur la figure 1 : $y = \frac{-g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} * x^2 + \tan\alpha * x$, soit exactement $y(x) = A * x^2 + B * x$, avec :

$$\begin{cases} A = \frac{-g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} \\ B = \tan\alpha \end{cases}$$

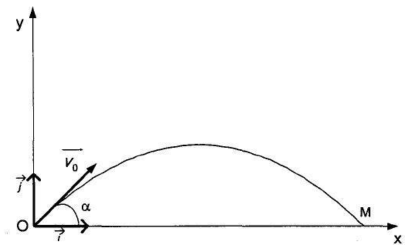

FIG. 3 – Trajectoire parabolique du boulet, décrite par $y(x) = Ax^2 + Bx$

On voit que B est sans dimension, donc sans unités, tandis que A a la dimension de g divisée par celle d'une vitesse au carré : $[A] = \frac{[g]}{[v^2]} = \frac{L*T^{-2}}{(L*T^{-1})^2} = L^{-1}$. A a donc la dimension de l'inverse d'une longueur, et sera en m^{-1}, si x et y sont exprimés en m.

2.3.1/ Par définition la portée est ici *la distance entre l'origine du repère et le point où la trajectoire recoupe l'axe des x*. Ce qu'il faut donc chercher pour trouver la portée du tir, c'est l'abscisse x du point où la fonction y s'annule, puisqu'on cherche un point où le boulet repasse par la valeur $y = 0$ (niveau de la mer). On prend donc l'équation de la trajectoire déterminée avant, et on cherche les points x qui peuvent donner lieu à une valeur nulle pour y : on a $y = x(Ax + B)$, donc si on veut les point tels que $y = 0$, il faut que x vérifie : $x(Ax + B) = 0$. Cela est possible dans deux cas : $x = 0$, ou $Ax + B = 0$. Le premier cas correspond à l'origine du repère et n'est donc pas le point qui nous intéresse, par contre le deuxième cas donne : $x = -\frac{B}{A}$ (qui est positif car A est négatif donc pas de problème). Ce point est donc celui qui nous intéresse.
On a donc trouvé la portée du tir en fonction de A et B : $d = -\frac{B}{A}$.

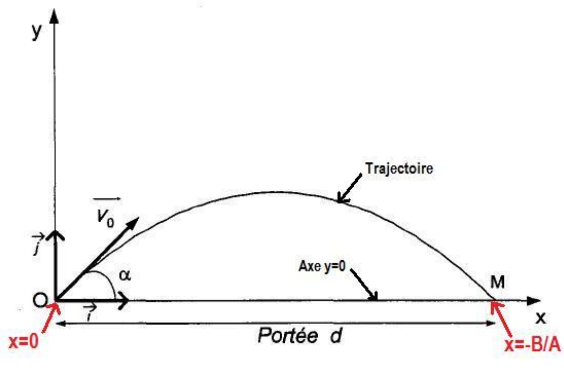

FIG. 4 – Détermination de la portée : intersections de la trajectoire avec $y = 0$

2.3.2/ On a une fonction d qui dépend de α, et on cherche la valeur de ce paramètre α pour laquelle d est maximum. On voit que d est exprimée en fonction de $\sin(2\alpha)$, or la fonction sinus oscille et vaut au maximum 1, lorsque l'angle utilisé vaut 90°. Quand $\sin(2\alpha)$ est maximum, d est maximum, et cela arrive lorsque $2\alpha = 90°$. On retrouve donc bien le fait que la portée du tir est maximum si l'angle de tir vaut $\alpha = 45°$.

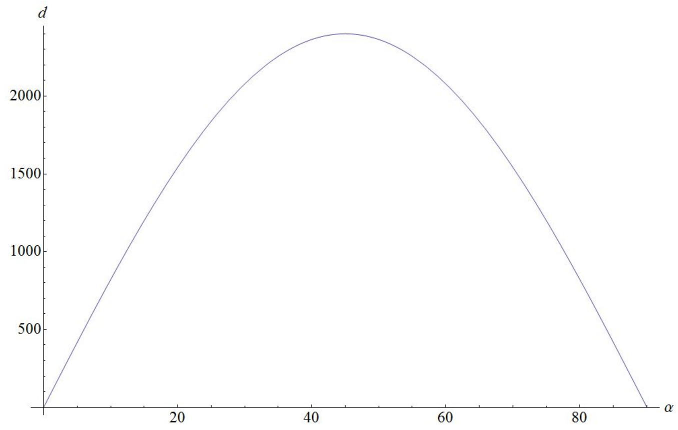

FIG. 5 – Allure de la courbe d en fonction de α

2.3.3/ On cherche à savoir quelle vitesse initiale doit avoir un boulet pour atteindre la portée citée de 2400m. On inverse donc l'expression de la portée en : $v_0 = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\alpha}}$. En se plaçant à l'angle de tir optimal de 45° et en imposant à la portée d'être $d = 2400m$, on trouve : $v_0 = \sqrt{10 * 2400} = \sqrt{2.4 * 10^4} = 1.5*10^2 m.s^{-1}$. *Si on veut atteindre la portée de 2400m, le boulet doit au départ avoir une vitesse de 150* $m.s^{-1}$.

2.3.4/ Les frottements, que l'on n'a pas pris en compte pour l'instant, vont ralentir le boulet par rapport au cas idéal, et lui faire perdre de l'énergie. Pour une même vitesse initiale, le boulet ira donc moins loin que ce que l'on a calculé sans frottements. Pour effectivement atteindre la portée maximale de 2400m il faut donc s'attendre à devoir utiliser une vitesse initiale plus élevée que celle que nous venons de calculer.